HOE WORDEN EENVOUDIGE REKENOPGAVEN IN HET GEHEUGEN OPGESLAGEN? EVIDENTIE UIT DE COGNITIEVE PSYCHOLOGIE

J. De Brauwer & W. Fias

Vakgroep Experimentele Psychologie, UGent

ABSTRACT

In dit artikel wordt gefocust op eenvoudige rekenopgaven (i.e., met kleine getallen, vb. 3 + 4, 7 × 8, 21 : 3) en hoe deze worden opgeslagen in het geheugen. Naast een overzicht van de onderzoeksliteratuur rond dit thema wordt tevens ingegaan op eigen onderzoek. Hierin werd nagegaan hoe eenvoudige vermenigvuldigingen en delingen worden opgeslagen in ons geheugen en hoe deze representaties doorheen de ontwikkeling tot stand komen. De onderzoeksvraag die we trachtten te beantwoorden is de volgende: bestaat er een onafhankelijk geheugennetwerk voor delingsfeiten? Deze onderzoeksvraag werd op twee verschillende manieren benaderd. Enerzijds beschreven we de ontwikkelingstrajecten van de performantie op beide operaties in het derde en vierde leerjaar. Uit deze studie bleek dat de ontwikkelingstrajecten van beide operaties quasi identiek zijn. Niettemin is er een verschil tussen beide operaties op het vlak van automaticiteit. In een andere studie hanteerden we een trainingsparadigma om na te gaan of en hoe beide operaties bij volwassenen aan elkaar gelinkt zijn. De sterke leereffecten tussen beide operaties wijzen duidelijk in de richting van een sterke link tussen beide operaties in het geheugen. Vermenigvuldiging en deling dienen volgens ons dan ook beschouwd te worden als interagerende vaardigheden.

TREFWOORDEN

rekenfeiten, vermenigvuldiging, deling, ontwikkeling, training

INLEIDING

Rekenen is een vaardigheid die we vaak gebruiken, niet alleen in een schoolse context, maar ook in het dagelijks leven. We kennen vier rekenkundige operaties (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen). Om deze operaties te kunnen begrijpen en uitvoeren hebben we drie verschillende types van kennis nodig. De *conceptuele kennis* van deze operaties houdt in dat je weet WAT te doen (vb. ‘optellen is bij mekaar voegen, vermeerderen’). Dit dient onderscheiden te worden van de *procedurele kennis* van deze operaties, HOE je ze moet uitvoeren (vb. $4 + 3 = 4 + 1 + 1 + 1$). Procedurele kennis wordt met andere woorden gedefinieerd als de vaardigheid om de opeenvolgende stappen van rekenkundige procedures correct uit te voeren. Naarmate iemand meer ervaring opdoet gaat hij/zij niet telkens opnieuw de procedure uitvoeren maar zullen er geleidelijk aan rechtstreekse geheugensporen ontstaan tussen een (eenvoudige) opgave en een antwoord (vb. $4 + 3 = 7$) en ontstaat er *feitenkennis*. Feitenkennis wordt gedefinieerd als de vaardigheid om oplossingen van eenvoudige rekenopgaven (met ééncijferige getallen) rechtstreeks uit het geheugen op te halen. In de onderzoeksliteratuur over hoofdrekenen worden feitenkennis en procedurele vaardigheden als onafhankelijk van elkaar beschouwd. Heel wat evidentie toont aan dat dit een valide assumptie is. Deze evidentie komt vooral uit neuropsychologische hoek. Er werd immers een dubbele dissociatie beschreven bij patiënten met hersenletsels: enerzijds observeerden zowel Sokol, McCloskey, Cohen en Aliminosa (1991) als Whetstone (1998) een patiënt die géén kennis van rekenfeiten bezat maar wél correct de procedures kon uitvoeren. Anderzijds beschreven McNeil en Burgess (2002) een patiënt met het omgekeerde patroon: intacte feitenkennis maar een slecht gebruik van procedures. Deze dubbele dissociatie toont ontegensprekelijk aan dat procedurele en feitenkennis onafhankelijk van mekaar bestaan. Het is bovendien zo dat getallenkennis onafhankelijk is van andere vormen van kennis, er werd onder andere een patiënte beschreven die bijvoorbeeld niet meer in staat was om te beschrijven hoe een olifant eruitziet, maar wel nog in staat was om te zeggen hoeveel 7×8 is (Zamarian, Karner, Benke, Donnemiller & Delazer, 2006). Kennis van rekenfeiten kan dus als een relatief onafhankelijk kennisdomein worden beschouwd. Reeds in de jaren zeventig en tachtig werd onderzoek verricht naar de kennis van eenvoudige rekenfeiten en hoe deze opgeslagen worden in het geheugen. Tot op heden blijft dit een belangrijk onderzoeksdomein binnen de cognitieve psychologie, zoals blijkt uit de vele publicaties die over dit onderwerp verschijnen (voor een recent overzicht verwijzen we naar Domahs & Delazer, 2005 en Campbell, 2005). In de lagere school wordt heel wat tijd en moeite geïnvesteerd in het aanleren van deze rekenfeiten. Het voordeel van het bezitten van deze feitenkennis ligt voor de hand: het ophalen van oplossingen uit het geheugen gaat sneller, makkelijker en vraagt minder capaciteit van het werkgeheugen dan het uitvoeren van een procedure.

Een vraag die zich dan stelt is of ophaling uit het geheugen daadwerkelijk de dominante strategie is? Binnen de cognitieve psychologie werd dit op twee manieren onderzocht. Enerzijds werd de methode van zelfrapportage gebruikt. Dit houdt in dat na elke opgave aan proefpersonen wordt gevraagd hoe ze de opgave hebben opgelost, door middel van ophaling (‘ik weet het gewoon, de oplossing kwam op in mijn hoofd’) of door middel van een procedure (vb. tellen). Heel wat onderzoek toonde aan dat volwassenen inderdaad meestal de oplossing van eenvoudige rekenopgaven uit het geheugen ophalen in plaats van procedures te gebruiken. Vooral voor eenvoudige vermenigvuldigingen (de ‘tafels’) is ophaling uit het geheugen heel frequent. Onder andere Campbell en Xue (2001) onderzochten dit en hun proefpersonen rapporteerden in 97% van de gevallen dat ze ophaling gebruikt hadden. Zelfrapportage is echter niet de enige manier om dit te gaan onderzoeken. Bovendien variëren percentages gebruik van ophaling nogal tussen operaties (voor eenvoudige deling gaat dit van 45 tot 90%; vb. LeFèvre & Morris, 1999; Campbell & Timm, 2000) en tussen studies (van 81 tot 97% voor vermenigvuldiging; LeFèvre et al., 1996; Campbell & Xue, 2001) en werd de validiteit van deze methode in vraag gesteld (Kirk & Ashcraft, 2001). De instructies die men geeft kunnen immers de zelfrapportage van de proefpersonen beïnvloeden en bijvoorbeeld leiden tot een frequenter gebruik van procedures in plaats van ophaling (Kirk & Ashcraft, 2001). Toch is het een algemeen aanvaard gegeven dat ophaling uit het geheugen de meest frequente strategie is voor optelling en vermenigvuldiging omdat ook andere onderzoeksmethoden tot deze conclusie leiden: een alternatieve manier om dit te onderzoeken is de ‘getalsmatchingtaak’. Deze taak verloopt als volgt: twee getallen worden heel kort aangeboden op het scherm (vb. 3 en 7), deze worden onmiddellijk gevolgd door een derde getal (vb. 21). De taak van de proefpersoon bestaat erin te beslissen of het derde getal (21) al dan niet voorkomt bij de twee eerste getallen. Wanneer er een rekenkundige relatie bestaat tussen de drie getallen, zoals in het voorbeeld, dan observeert men tragere responsen dan wanneer er geen rekenkundige relatie bestaat. Dit wordt een interferentie effect genoemd, de feitenkennis in het geheugen interfereert met de taak. Dit interferentie effect bewijst dat getallen automatisch leiden tot de activatie van hun product of som in het geheugen. Dit werd reeds geobserveerd voor optellingen (LeFèvre, Bisanz & Mrkonjic, 1988) en vermenigvuldigingen (Thibodeau, LeFèvre & Bisanz, 1996). Sterker nog, Galfano, Rusconi en Umiltà (2003) toonden aan dat niet alleen het product automatisch geactiveerd wordt in een getalsmatchingtaak, maar ook verwante producten. Bij het zien van vb. 7 en 3 wordt dus niet alleen 21 geactiveerd, maar ook vb. 28 (de oplossing van 7×4). Deze bevinding illustreert hoe activatie zich in het geheugennetwerk verspreidt. Dit geeft ons tevens inzicht in de structuur van dit onderliggende geheugennetwerk. Er werden reeds heel wat theorieën voorgesteld hierover en er is nog heel wat discussie over de details van de organisatie van rekenfeiten in het geheugen. De meeste theorieën (vb., Campbell, 1995; Verguts & Fias, 2005) zijn het wel eens over het bestaan van een netwerkstructuur waarbij er verbindingen zijn tussen de getallen uit de opgave en de (juiste) oplossing, maar ook tussen de verschillende opgaven en oplossingen onderling. Met andere woorden, bij het zien van 7×3 wordt '21' geactiveerd, maar ook de 'verwante' opgaven (vb., $7 \times 4 = 28$). De essentie van een goed model is uiteraard dat het in staat is om verklaringen te geven voor een aantal robuuste observaties. De verschillende theorieën verschillen in de manier waarop ze deze effecten verklaren. Hier gaan we niet dieper op in (omdat de verschillen binnen het bestek van het huidig artikel niet van wezenlijk belang zijn) maar we zullen ons beperken tot een beschrijving van deze robuust geobserveerde effecten. Een eerste effect is het *probleemgrootte effect*. Dit is de observatie dat opgaven met grote getallen (vb. 7×8) trager en met meer fouten worden opgelost dan opgaven met kleine getallen (vb. 3×4) (vb., Stazyk, Ashcraft & Hamann, 1982). Wat men eveneens observeert is dat opgaven met het getal 5 sneller en met minder fouten worden opgelost dan opgaven zonder het getal 5 (het *five of vijf effect*, vb., Siegler, 1988) en dat opgaven met twee gelijke cijfers (4×4) sneller en met minder fouten worden opgelost dan opgaven met twee verschillende cijfers (4×6) (*het tie of knoop effect*, vb. Campbell & Gunter, 2002). Er wordt tevens een interactie-effect geobserveerd tussen het knoop en het probleemgrootte effect, in de zin dat opgaven met twee gelijke cijfers (zogenaamde 'knopen') een kleiner probleemgrootte effect vertonen dan opgaven met twee verschillende cijfers (niet-knopen) (Campbell & Gunter, 2002). Ook het interferentie effect is een robuuste observatie (zie boven). Deze observaties suggereren dat rekenfeiten niet zomaar 'mechanische' verbale associaties zijn, maar dat er een numerieke organisatie van rekenfeiten in ons geheugen aan de basis ligt. Dit is dan ook het uitgangspunt van de meeste theorieën.

Een andere theoretisch relevante vraag betreft de cognitieve relatie tussen de vier rekenkundige operaties. Aangezien optelling en aftrekking enerzijds en vermenigvuldiging en deling anderzijds complementaire operaties zijn, is het mogelijk om op basis van conceptuele, procedurele en/of feitenkennis van de ene operatie tot een oplossing te komen voor de andere, complementaire operatie. Een andere mogelijkheid is dat er een onafhankelijk geheugennetwerk bestaat per operatie. Nagaan hoe de conceptuele links tussen de operaties gereflecteerd worden in de manier waarop feitenkennis wordt opgeslagen in ons geheugen, is naar onze mening dan ook een belangrijk onderzoeksthema voor het begrijpen van het hoe en waarom van onze rekenkundige kennis. Bijvoorbeeld, aangezien deling de inverse operatie is van vermenigvuldiging en aangezien er heel wat evidentie is voor het feit dat vermenigvuldigingen in het geheugen opgeslagen zitten, zou men intuïtief denken dat het voldoende is om te weten dat $7 \times 3 = 21$ om ook te weten dat $21 : 3 = 7$. Vooraleer over te gaan tot de beschrijving van ons eigen onderzoek rond dit thema, zullen we dieper ingaan op de bestaande literatuur hieromtrent. Ook hier zijn beschrijvingen van patiënten met hersenletsels zeer informatief. Er werden patiënten beschreven die nog konden vermenigvuldigen maar niet meer konden delen (Cipolotti & deLacy Costello, 1995; Delazer & Benke, 1997; Dehaene & Cohen, 1997; Delazer, Karner, Zamarian, Donnemiller & Benke, 2006), maar er werden eveneens patiënten beschreven die voor geen van beide operaties in staat waren om oplossingen uit het geheugen op te halen (Delazer, Semenza & Denes, 1994; Sandrini, Miozzo, Cotelli & Cappa, 2003; Delazer et al., 2004; etc.). Het patroon met intacte deling en verstoorde vermenigvuldiging werd (nog) niet beschreven. Deze laatste observatie (m.a.w. de dubbele dissociatie) zou impliceren dat delings- en vermenigvuldigingsfeiten op zijn minst bij die specifieke patiënt onafhankelijk van elkaar worden opgeslagen. Zonder de observatie van een dubbele dissociatie kunnen we echter (nog) geen conclusies trekken met betrekking tot de cognitieve relatie tussen vermenigvuldiging en deling. Het blijft mogelijk dat delingen apart opgeslagen zitten in het geheugen, maar het patroon waarbij deling verstoord is en vermenigvuldiging intact, kan eveneens geïnterpreteerd worden in termen van toegangsproblemen, in de zin dat beide operaties in één netwerk worden opgeslagen maar dat de toegang moeilijker is (vb. door minder oefening) voor delingen. Dit impliceert dat delingen eerst zullen uitvallen bij hersenletsel. Met andere woorden, tot op heden kunnen uit patiëntenstudies geen sterke besluiten getrokken worden.

Daarom zijn we op zoek gegaan naar alternatieven om de cognitieve relatie tussen beide operaties te onderzoeken.

Een beschrijving van de ontwikkelingstrajecten van beide operaties zou ons meer inzicht kunnen verlenen aangezien op die manier gelijkenissen en verschillen tussen beide operaties doorheen de ontwikkeling aan het licht zullen komen. Er is echter nog maar weinig onderzoek verricht over hoe kinderen eenvoudige delingen oplossen. Daarom werd een longitudinaal onderzoek opgezet bij normaal ontwikkelende kinderen (De Brauwer, ongepubliceerde doctoraatsverhandeling), dat in dit artikel kort zal worden beschreven.

Een andere manier om deze onderzoeksvraag aan te pakken is bij gezonde volwassenen de invloed nagaan van het ophalen van feiten van de ene operatie op het ophalen van corresponderende feiten van de andere operatie, vb. als men eerst 3×7 oplost en een tijd later $21 : 3$ dient op te lossen, heeft dit dan een invloed? Uit voorgaande studies die deze methode gebruikten vallen voorlopig moeilijk eenduidige conclusies te trekken. Sommige studies vinden wel degelijk (positieve) transfer-effecten, andere dan weer niet en ook de richting (van vermenigvulging naar deling of omgekeerd) van de transfer-effecten verschilt tussen studies (LeFèvre & Morris, 1999; Campbell, 1999; Campbell, Fuchs-Lacelle & Phenix, 2006; Rickard & Bourne, 1996). Daarom werd een nieuwe trainingsstudie uitgevoerd bij volwassenen (De Brauwer, ongepubliceerde doctoraatsverhandeling), deze studie wordt eveneens kort besproken verderop in dit artikel.

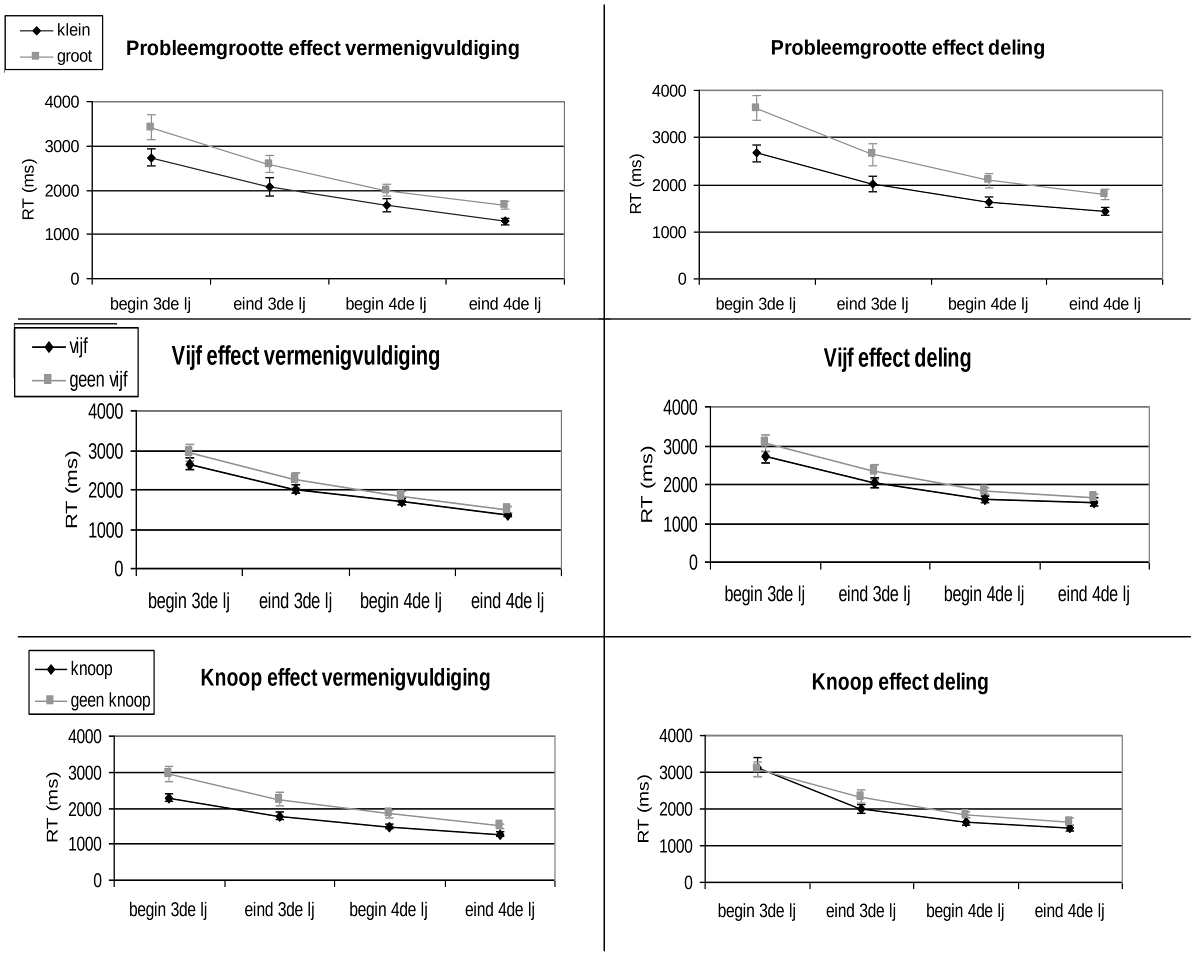
ONTWIKKELINGSTRAJECTEN

Om de ontwikkelingstrajecten van zowel vermenigvuldiging als deling te beschrijven werd de performantie van kinderen uit het derde leerjaar op vermenigvuldiging, deling en de getalsmatchingtaak twee keer per schooljaar en voor twee opeenvolgende schooljaren gemeten. Nog maar weinig studies onderzochten de ontwikkeling van de performantie op delingen (maar zie Robinson et al., 2006). Eén van de doelen van deze studie was dan ook om deze leemte op te vullen.

We wilden tevens de performantie op beide operaties vergelijken omdat dit ons meer kan leren over de cognitieve relatie tussen beide operaties. Hiervoor focusten we op de vier effecten die robuust geobserveerd worden wanneer volwassenen eenvoudige *vermenigvuldigingen* oplossen, namelijk het probleemgrootte effect, het vijf effect, het knoop effect en het interferentie effect (zie boven). Het observeren van gelijkaardige ontwikkelingstrajecten voor deze effecten in beide operaties zou er immers op wijzen dat gelijkaardige principes aan de basis liggen van de geheugenrepresentatie ervan. Eerder onderzoek toonde reeds aan dat al heel vroeg in de ontwikkeling ophaling uit het geheugen de dominante strategie wordt om eenvoudige vermenigvuldigingen op te lossen (Cooney, Swanson & Ladd, 1988; Lemaire & Siegler, 1995). De effecten van probleemgrootte, vijf en knoop status werden ook reeds geobserveerd bij kinderen (Campbell & Graham, 1985; De Brauwer, Verguts & Fias, 2006), net als interferentie effecten in een productietaak (Koshmider & Ashcraft, 1991). Over deling weten we echter nog heel weinig op ontwikkelingsvlak, behalve dat er een probleemgrootte effect geobserveerd wordt vanaf het vierde leerjaar (Robinson et al., 2006).

Dezelfde kinderen (n = 27) namen deel aan vier meetmomenten: begin en eind derde leerjaar en begin en eind vierde leerjaar. In het eerste meetmoment was de gemiddelde leeftijd van de 27 kinderen 8 jaar en 3 maanden (range van 7 jaar 10 maanden tot 9 jaar 3 maanden). Op elk meetmoment werden twee *verificatietaken* (i.e., $3 \times 8 = 26$, juist of fout?) afgenomen: vermenigvuldiging en deling. De stimuli voor beide verificatietaken waren de 64 ‘standaard’ vermenigvuldigingsproblemen (2×2 tot en met 9×9) en hun corresponderende delingen (4 : 2 tot en met 81 : 9). Er werd ook telkens een *getalsmatchingtaak* afgenomen. In deze taak ziet men eerst twee getallen (“8 2”), dan een derde targetgetal (“16”). De taak bestaat erin te beslissen of het targetgetal wel of niet voorkwam in de eerst gepresenteerde getallen (de cue). Er dient dus een ja/nee respons gegeven te worden. De performantie op twee trialtypes wordt hier vergeleken: namelijk de trials waarbij er een rekenkundige relatie is tussen de drie getallen en de trials waarin dit niet het geval is. Dit zijn beide trials waarbij een ‘nee’ respons gegeven dient te worden. Bij de helft van de kritische stimuli (met een rekenkundige relatie tussen de getallen) was het targetgetal het product van de eerste twee getallen (vb., 8 2 en 16), bij de andere helft was het targetgetal het quotient van de eerste twee getallen (16 2 en 8).

De resultaten van de verificatietaken (zie Figuur 1 bovenaan) toonden dat het probleemgrootte effect in beide operaties geobserveerd werd en niet verschilde in grootte tussen beide operaties. Er was tevens geen enkel verschil tussen beide operaties in het ontwikkelingsverloop van het probleemgrootte effect. Ook voor het vijf effect was dit het geval (midden Figuur 1): het was zowel in de performantie op vermenigvuldigingen als op delingen aanwezig voor kinderen van deze leeftijd, het effect evolueerde niet in grootte doorheen de ontwikkeling én dit gold voor beide operaties. De patronen voor het knoop effect waren iets complexer (Figuur 1 onderaan). Het effect was aanwezig voor beide operaties, behalve voor deling aan het begin van het derde leerjaar, zoals ook kan gezien worden op de figuur. Op het einde van het derde leerjaar wordt dit effect wel significant voor deling en het blijft vanaf dan even groot. Ook was het knoop effect sterker voor vermenigvuldiging dan voor deling.



Figuur 1. Illustratie van het probleemgrootte-effect (bovenaan), het vijf effect (midden) en het knoop effect (onderaan) doorheen de vier meetmomenten, voor vermenigvuldiging (links) en deling (rechts). Reactietijden worden in ms weergegeven en error bars zijn standaardfouten van het gemiddelde.

De interactie tussen probleemgrootte en knoop status was ook aanwezig in de data. Het probleemgrootte effect was veel kleiner voor knoop-problemen (109 ms) dan voor geen-knoop-problemen (532 ms). Het cruciale punt is dat deze interactie niet verschilde tussen beide operaties Bijgevolg besluiten we dat er een interactie tussen knoop en probleemgrootte aanwezig was in deze data, en dit voor beide operaties, voor alle meetmomenten en dat deze interactie even groot bleef doorheen de ontwikkeling.

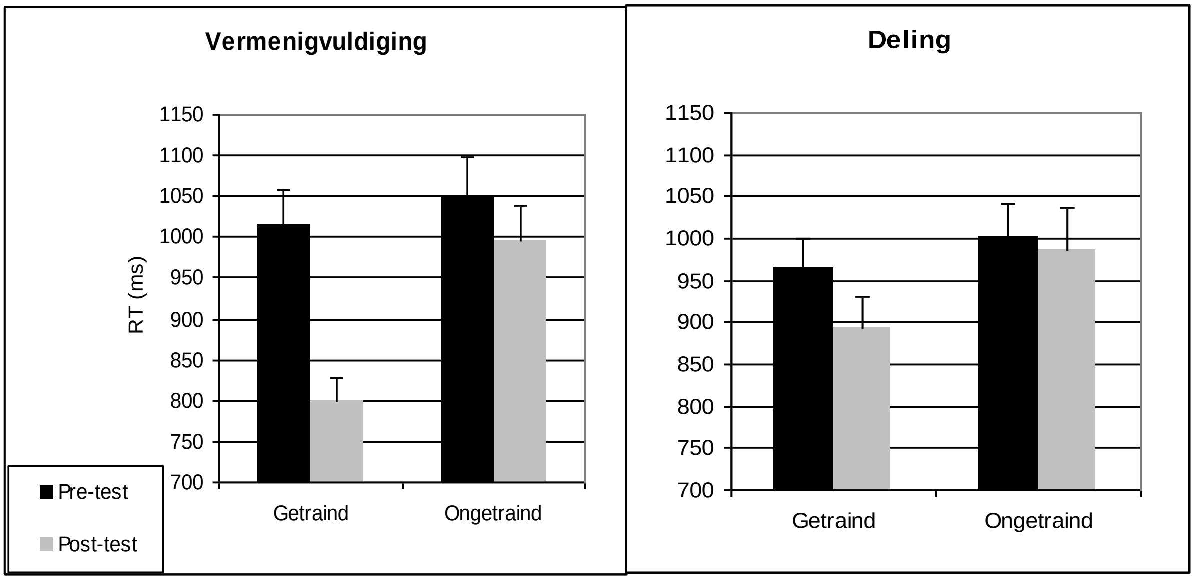
Het interferentie effect in de getalsmatchingtaak werd enkel geobserveerd voor vermenigvuldiging, niet voor deling. Voor vermenigvuldiging bleef dit effect even groot doorheen de verschillende meetmomenten.

In deze studie werd zowel vermenigvuldiging als deling onderzocht en dit kort nadat de kinderen de tafels aangeleerd kregen en tot op het einde van het vierde leerjaar. Alle effecten die standaard bij volwassenen geobserveerd worden (het probleem-grootte effect, het vijf effect en het knoop effect) werden ook bij de kinderen geobserveerd en dit vrij snel nadat ze de tafels van vermenigvuldiging leerden. Bovendien werden alle effecten zowel bij vermenigvuldiging als bij deling teruggevonden. De sterke parallellen tussen beide operaties waren opvallend: zowel de grootte van de effecten, als de evolutie ervan waren heel gelijklopend voor vermenigvuldiging en deling. Dit aantonen is noodzakelijk om de mogelijkheid dat er onafhankelijke netwerken voor vermenigvulding en deling in ons geheugen bestaan te kunnen uitsluiten. Toch waren er ook enkele verschillen tussen vermenigvuldiging en deling: het knoop effect ontwikkelde anders voor deling en er werd geen evidentie gevonden voor automatische activatie van delingen bij de kinderen, terwijl er wel automatische activatie van vermenigvuldigingen werd gevonden. Dit duidt erop dat de kinderen al in het derde leerjaar een geheugennetwerk voor vermenigvuldigingen bezitten, waarin de verbindingen tussen problemen en hun oplossingen sterk genoeg zijn om interferentie te veroorzaken in een getalsmatchingtaak. De kinderen bezitten tevens een sterk geassocieerd (of zelfs één en hetzelfde) netwerk van delingen en hun oplossingen, maar hier zijn de verbindingen (nog) niet sterk genoeg om automatisch geactiveerd te worden.

TRAINING

In een andere studie werd dezelfde onderzoeksvraag (bestaat er een onafhankelijk delingsnetwerk?) aangepakt bij volwassenen door gebruik te maken van een trainingsparadigma. Hierdoor konden we nagaan of we bij mensen met een hoge vaardigheid in eenvoudige vermenigvuldigingen of delingen (door training) evidentie konden vinden voor het bestaan van een onafhankelijk delingsnetwerk, zoals verwacht wordt vanuit een invloedrijk model hierover (Rickard, 2005). In dit model wordt er van uitgegaan dat er initieel overlappende geheugenrepresentaties zijn voor vermenigvuldigingen en delingen, maar dat deze geheugenrepresentaties volkomen onafhankelijk van elkaar worden wanneer een hoge vaardigheid wordt bereikt. Als er daadwerkelijk een onafhankelijk delingsnetwerk ontstaat wanneer een hoge vaardigheid wordt bereikt, dan zou het intensief trainen van vb. 21 : 3 geen enkele invloed mogen hebben op het oplossen van 3×7 en vice versa. Een eerste groep proefpersonen (psychologiestudenten) werd getraind op vermenigvuldigingen, een tweede groep studenten op delingen. Het experiment bestond altijd uit een pre-test, trainingsfase en een post-test. In de pre- en post-test werden alle vermenigvuldigingen en delingen van de standaard set afgenomen (2×2 tot en met 9×9 en de corresponderende delingen), wat resulteert in 64 problemen per operatie. In de trainingsfase werd, afhankelijk van de groep, een subset bestaande uit negen vermenigvuldigings- of delingsproblemen getraind. Er werd voor gekozen om 'grote' problemen te trainen (i.e., met product > 25 en de corresponderende delingen) om de effecten van training te optimaliseren (voor kleine problemen is men reeds te snel, wat zou resulteren in minimale of afwezige effecten van training). Het experiment werd individueel afgenomen en bestond uit twee sessies (+/- 1u) op twee opeenvolgende dagen.

De resultaten van de eerste groep worden getoond in Figuur 2 (training vermenigvuldigingen), deze van de tweede groep (training delingen) in Figuur 3. We zullen eerst ingaan op het patroon voor groep één. De analyses toonden aan dat getrainde vermenigvuldigingen uiteraard een voordeel ondervonden van de trainingsfase: getrainde vermenigvuldigingen werden significant sneller opgelost na de training dan ervoor, en binnen de post-test werden getrainde vermenigvuldigingen significant sneller opgelost dan ongetrainde vermenigvuldigingen. Reactietijden op ongetrainde vermenigvuldigingen daalden niet van pre-test naar post-test. De delingsproblemen corresponderend met de getrainde vermenigvuldigingen werden eveneens sneller opgelost na de trainingsfase, terwijl reactietijden voor delingen die corresponderen met de ongetrainde vermenigvuldigingen niet daalden. Dit werd bevestigd door het significante verschil binnen de post-test: delingsproblemen corresponderend met getrainde vermenigvuldigingen werden significant sneller opgelost dan delingsproblemen corresponderend met ongetrainde vermenigvuldigingen. Dus, het trainen van (grote) vermenigvuldigingen leidt tot snellere reactietijden op deze problemen maar ook op de corresponderende delingen.

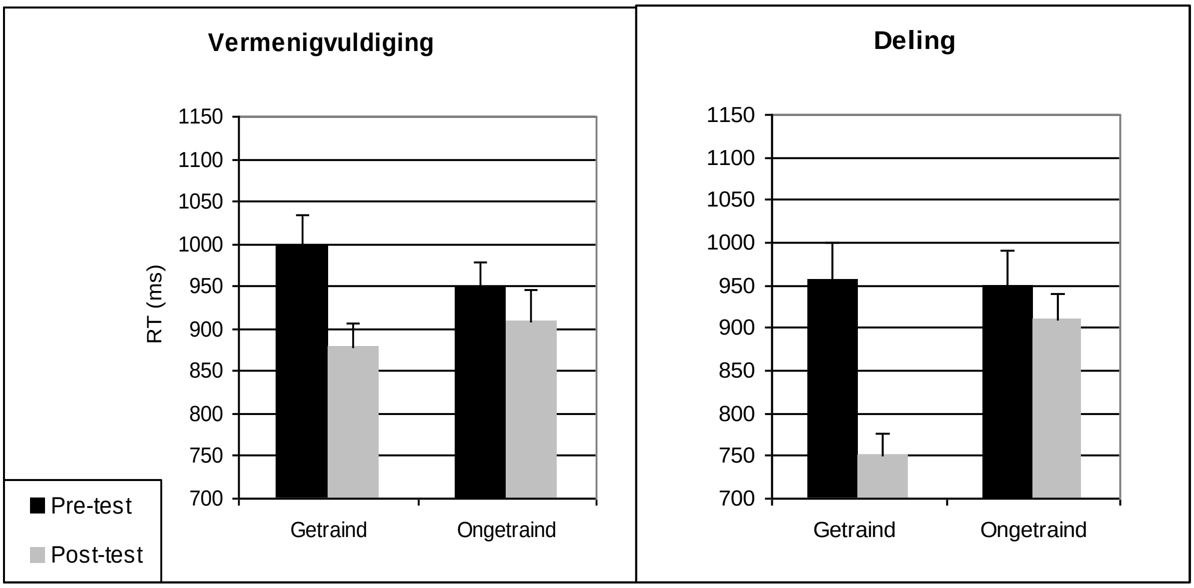


Figuur 2. Reactietijden (in ms) op vermenigvuldigingen (links) en delingen (rechts) van de groep getraind op vermenigvuldigingen. Reactietijden vóór de training (pre-test) en na de training (post-test) en op getrainde en ongetrainde problemen worden weergegeven. Error bars zijn standaardfouten van het gemiddelde.

Voor proefpersonen die getraind werden op delingen (Figuur 3) toonden de resultaten dat getrainde delingen en de corresponderende vermenigvuldigingen voordeel haalden uit de trainingsfase, maar ongetrainde problemen niet. Zowel de getrainde delingen als de corresponderende vermenigvuldigingen werden sneller opgelost na de trainingsfase. Reactietijden op ongetrainde delingen en de corresponderende vermenigvuldigen daalden niet. Binnen de post-test werden getrainde delingen sneller beantwoord dan ongetrainde delingen.

De resultaten van deze trainingsstudie toonden heel duidelijk dat het trainen van vermenigvuldigingen tot een betere prestatie leidde op de corresponderende delingen en omgekeerd.

Dit impliceert dat ook bij mensen met een hoge vaardigheid er wel degelijk een link bestaat tussen vermenigvuldigings- en delingsfeiten in het geheugen.



Figuur 3. Reactietijden (in ms) op vermenigvuldigingen (links) en delingen (rechts) van de groep getraind op delingen. Reactietijden vóór de training (pre-test) en na de training (post-test) en op getrainde en ongetrainde problemen worden weergegeven. Error bars zijn standaardfouten van het gemiddelde.

ALGEMENE CONCLUSIE

De drie belangrijkste conclusies die uit het voorgestelde onderzoek kunnen getrokken worden zijn de volgende: Ten eerste, de geheugennetwerken voor eenvoudige vermenigvuldigingen en delingen zijn *niet* onafhankelijk van elkaar. Naar onze mening en in lijn met de gepresenteerde data, bestaat er één gemeenschappelijk geheugennetwerk om zowel vermenigvuldigingen als delingen op te lossen. Indien er toch twee netwerken zouden bestaan, dan zijn deze op dezelfde manier georganiseerd en vertonen ze hetzelfde ontwikkelingsverloop. Deze netwerken zouden bijgevolg in dergelijke mate gelijkend zijn dat ze niet te onderscheiden zijn van elkaar.

Ten tweede, elk model over de geheugenrepresentatie van rekenfeiten moet ook in staat zijn om veranderingen doorheen de ontwikkeling te verklaren en mag zich niet beperken tot de representatie van rekenfeiten bij volwassenen. Dit is tot op heden wel vaak het geval (met uitzondering van Verguts & Fias, 2005).

Ten derde, onze bevindingen en meer bepaald de sterke parallellen tussen vermenigvuldiging en deling in kinderen en de sterke leereffecten tussen beide operaties in volwassenen, tonen dat vermenigvuldiging en deling *niet* als hiërarchisch geordende operaties moeten beschouwd worden. Traditioneel worden de vier rekenkundige bewerkingen in een strikte volgorde aangeleerd: eerst optelling, dan aftrekking, vervolgens vermenigvuldiging en als laatste deling. Dit is echter op geen enkele pedagogische of psychologische theorie gebaseerd, al vloeit het waarschijnlijk voort uit het Piagetiaanse idee dat bepaalde numerieke vaardigheden eerst moeten beheerst worden vooraleer andere (misschien moeilijkere) vaardigheden kunnen verworven worden (Piaget, 1952). Op basis van onze bevindingen lijkt het correcter om vermenigvuldiging en deling als twee wederzijds afhankelijke en interagerende vaardigheden te beschouwen. Een eveneens wijdverbreide visie is dat vermenigvuldiging en deling gewoon twee andere operaties zijn die door kinderen moeten aangeleerd worden en dat er geen grote veranderingen nodig zijn in de redeneringen van kinderen om dit te kunnen. Er zijn inderdaad gelijkenissen tussen optellen en aftrekken enerzijds en vermenigvuldigen en delen anderzijds, maar er zijn ook heel wat verschillen. Vermenigvuldiging is niet zomaar herhaalde optelling en deling is niet zomaar herhaalde aftrekking, een goed begrip houdt meer in. Bijvoorbeeld, een kind moet 'one-to-many correspondence' leren begrijpen: "één kind heeft twee voeten, als er zes kinderen zijn, dan zijn er 12 voeten". Een opmerkelijke observatie van Nunes en Bryant (1996) is dat 5 tot 6 jarigen hier al heel wat van begrijpen. Blöte, Lieffering en Ouwehand (2006) toonden aan dat zelfs vierjarigen dit al kunnen leren en problemen als '4 honden willen drie koekjes elk, hoeveel koekjes heb je nodig?' kunnen oplossen. Omwille van dit onderzoek werd er geargumenteerd dat het niet nodig is dat kinderen eerst optelling en aftrekking beheersen vooraleer ze leren vermenigvuldigen (Nunes & Bryant, 1996). De *conceptuele kennis* van vermenigvuldiging kan dus reeds vroeg verworven worden. Het is tevens een feit dat kinderen al vroeg leren hoe ze (vb. speelgoed) moeten delen. Deze ervaringen vormen de basis voor hun begrip van het concept deling. Er valt natuurlijk meer te begrijpen aan deze operatie: kinderen moeten de relatie tussen de drie termen inzien. Correa, Nunes & Bryant (1998) demonstreerden dat zesjarigen al een redelijk inzicht hebben hierin, ongeveer de helft van de kinderen uit deze studie begrepen de inverse relatie tussen deler en quotiënt. De basis voor de conceptuele kennis van deling is dus reeds vroeg aanwezig. Bovendien beschouwen kinderen deling niet per definitie als moeilijker dan vermenigvuldiging (Mulligan & Mitchelmore, 1997), wat tevens strookt met onze eigen observaties.

Gezien de focus van het huidig artikel op feitenkennis, willen we nog kort ingaan op het belang dat hieraan al of niet dient gehecht te worden op school. Dit was (en is misschien nog altijd) een heet hangijzer onder leerkrachten en pedagogen. Hoe wordt een robuuste geheugenrepresentatie van rekenfeiten het best bereikt? Door dril of door het aanleren van strategieën? In de onderzoeksliteratuur bestaan uiteenlopende visies hierover. Enerzijds wordt geargumenteerd dat verschillende leermethodes tot eenzelfde representatie leiden, dat het met andere woorden niet uitmaakt hoe je rekenfeiten aangeleerd krijgt (Logan & Klapp, 1991). Anderzijds zijn er auteurs die argumenteren dat de beste manier om tot een robuuste geheugenrepresentatie te komen moet beginnen met het leren van strategieën en procedures (Delazer et al., 2005). Wij besluiten op basis van de literatuur en onze eigen bevindingen dat de conceptuele kennis van vermenigvuldiging en deling reeds vroeg kan verworven worden en dat het aanleren van procedurele kennis van *beide* operaties in combinatie met voldoende oefening, de beste manier is om tot een robuuste geheugenrepresentatie van vermenigvuldigings- en delingsfeiten te komen.

REFERENTIES

Blöte, A.W., Lieffering, L.M. & Ouwehand, K. (2006). The development of many-to-one counting in 4-yr-old children. *Cognitive Development, 21,* 332-348.

Campbell, J.I.D. (1995). Mechanisms of simple addition and multiplication: A modified network-interference theory and simulation. *Mathematical Cognition, 1,* 121-164.

Campbell, J.I.D. (1999). Division by multiplication. *Memory & Cognition, 27,* 791-802.

Campbell, J.I.D. (2005). *Handbook of mathematical cognition.* New York, Psychology Press.

Campbel, J.I.D., Fuchs-Lacelle, S. & Phenix, T.S. (2006). Identical elements model of arithmetic memory: Extension to addition and subtraction. *Memory & Cognition, 34,* 633-647.

Campbell, J. I. D., & Graham, D. J. (1985). Mental multiplication skill: Structure, process, and acquisition. *Canadian Journal of Psychology, 39,* 338-366.

Campbell, J. I. D., & Gunter, R. (2002). Calculation, culture, and the repeated operand effect. *Cognition, 86,* 71-96.

Campbell, J.I.D. & Timm, J.C. (2000). Adults' strategy choices for simple addition: Effects of retrieval interference. *Psychonomic Bulletin & Review, 7,* 692-699.

Campbell, J. I. D., & Xue, Q. (2001). Cognitive arithmetic across cultures. *Journal of Experimental Psychology: General, 130,* 299-315.

Cipolotti, L. & deLacy Costello, A. (1995). Selective impairment for simple division. *Cortex, 31,* 433-449.

Cooney, J. B., Swanson, H. L., & Ladd, S. F. (1988). Acquisition of mental multiplication skill: Evidence for the transition between counting and retrieval strategies. *Cognition & Instruction, 5,* 323-345.

Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology, 90,* 321-329.

De Brauwer, J. (2007). *The representations of arithmetic fact knowledge in memory and their development.* Ongepubliceerde doctoraatsverhandeling, Universiteit Gent, Gent.

De Brauwer, J., Verguts, T. & Fias, W. (2006). The representation of multiplication facts: Developmental changes in the problem-size, five, and tie effects. *Journal of Experimental Child Psychology, 94,* 43-56.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex, 33,* 219-250.

Delazer, M. & Benke, T. (1997). Arithmetic facts without meaning. *Cortex, 33,* 697-710.

Delazer, M., Domahs, F., Lochy, A., Karner, E., Benke, T. & Poewe, W. (2004). Number processing and basal ganglia dysfunction: A single case study. *Neuropsychologia, 42,* 1050-1062.

Delazer, M., Ischebeck, A., Domahs, F., Zamarian, L., Koppelstaetter, F., Siedentopf, C.M., Kaufman, L., Benke, T. & Felber, S. (2005). Learning by strategies and learning by drill – evidence from an fMRI study. *NeuroImage, 25,* 838-849.

Delazer, M., Karner, E., Zamarian, L., Donnemiller, E. & Benke, T. (2005). Number processing in posterior cortical atrophy – A neuropsychological case study. *Neuropsychologia, 44,* 36-51.

Delazer, M., Semenza, C. & Denes, G. (1994). Reading Arabic numbers and number words in a dyslexic patient. *Brain & Language, 47,* 437-439.

Domahs, F. & Delazer, M. (2005). Some assumptions and facts about arithmetic facts. *Psychology Science, 47,* 96-111.

Galfano, G., Rusconi, E. & Umiltà, C. (2003). Automatic activation of multiplication facts: Evidence from the nodes adjacent to the product. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 56A,* 31-61.

Kirk, E.P., & Ashcraft, M.H. (2001). Telling stories: The perils and promise of using verbal reports to study math strategies. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition, 27,* 157-175.

Koshmider, J. W., & Ashcraft, M. H. (1991). The development of children's mental multiplication skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 51,* 53-89.

LeFèvre, J.-A., Bisanz, J. & Mrkonjic, L. (1988). Cognitive arithmetic: Evidence for obligatory activation of arithmetic facts. *Memory & Cognition, 16,* 45-53

LeFèvre, J.-A., Bisanz, J., Daley, K.E., Buffone, L., Greenham, S.L. & Sadesky, G.S. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental Psychology: General, 125,* 284-306.

LeFèvre, J.-A. & Morris, J. (1999). More on the relation between division and multiplication in simple arithmetic: Evidence for mediation of division solutions via multiplication. *Memory & Cognition, 27,* 803-812.

Lemaire, P. & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General, 124,* 83-97.

Logan, G.D. & Klapp, S.T. (1991). Automatizing alphabet arithmetic: I. Is extended practice necessary to produce automaticity. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition, 17,* 179-195.

McNeil, J.E. & Burgess, P.W. (2002). The selective impairment of arithmetical procedures. *Cortex, 38,* 569-587.

Mulligan, J.T. & Mitchelmore, M.C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 309-330.

Nunes, T. & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics.* Oxford, UK: Blackwell Publishers.

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children.* New York: International Universities Press.

Rickard, T.C. (2005). Revised identical elements model of arithmetic fact representation. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition, 31*, 750-767.

Rickard, T.C. & Bourne, L.E. (1996). Some tests of an identical elements model of basic arithmetic skills. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition, 22*, 1281-1295.

Robinson, K.M., Arbuthnott, K.D, Rose, D., McCarron, M.C., Globa, C.A. & Phonexay, S.D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology, 93,* 224-238.

Sandrini, M., Miozzo, A., Cotelli, M. & Cappa, S.F. (2003). The residual calculation abilities of a patient with severe aphasia: Evidence for a selective deficit of subtraction procedures. *Cortex, 39,* 85-96.

Siegler, R. S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General, 117,* 258-275

Sokol, S.M., McCloskey, M., Cohen, N.J. & Aliminosa, D. (1991). Cognitive representations and processes in arithmetic: Inferences from the performance of brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition, 17*, 355-376.

Stazyk, E. H., Ashcraft, M. H., & Hamann, M. S. (1982). A network approach to simple mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 8*, 320-335.

Thibodeau, M.H., LeFèvre, J.A. & Bisanz, J. (1996). The extension of the interference effect to multiplication. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 50,* 393-396.

Verguts, T. & Fias, W. (2005). Interacting neighbors: A connectionist model of retrieval in single-digit multiplication. *Memory & Cognition, 33*, 1-16.

Whetstone, T. (1998). The representation of arithmetic facts in memory: Results from retraining a brain-damaged patient. *Brain & Cognition, 36,* 290-309.

Zamarian, L., Karner, E., Benke, T., Donnemiller, E. & Delazer, M. (2006). Knowing 7 × 8, but not the meaning of 'elephant': Evidence for the dissociation between numerical and non-numerical semantic knowledge. *Neuropsychologia, 44,* 1708-1723.

DANKWOORD

Het gerapporteerde onderzoek werd gefinancierd door een GOA beurs van de Universiteit Gent. Wij danken de leerkrachten en leerlingen van de Vrije Basisschool De Parel in Heusden voor hun deelname aan één van de gerapporteerde studies.

CORRESPONDENTIEADRES

Jolien De Brauwer, Vakgroep Experimentele Psychologie, Universiteit Gent, H. Dunantlaan 2, 9000 Gent. E-mail: jolien.debrauwer@ugent.be; Tel: 09/264 94 17; Fax: 09/264 64 96.